¿CAOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

José Carlos Fernandes Rodrigues
professor de matemática
junho de 2011

¿CAOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

Resumo

Problema: Reflexão sobre a possibilidade de se incorporar no ensino de matemática, nos ensinos fundamental e médio, algumas transformações científicas contemporâneas sobre sistemas dinâmicos e caos.

Objetivo: Ao se realizar uma breve reflexão sobre o desenvolvimento da matemática de Galileu, Descartes, Newton, Leibniz e outros, a partir do início do século **17**, até nossos dias, é possível perceber que pouco desse desenvolvimento foi incorporado aos conteúdos dos ensinos fundamental e médio.

Um motivo "**muito bom**" para que isso tenha acontecido é o fato de que muito desse desenvolvimento possui imensas dificuldades conceituais, teóricas e técnicas às pessoas em fase de formação escolar.

Mas, assim como educadores de ensino de física têm se preocupado em trazer a chamada "**física moderna**" para os ensinos fundamental e médio, está se colocando a possibilidade (a ser criticada) de trazer a esses ensinos alguns temas "mais modernos", tais como: "teoria dos grafos"; "topologia", "fractais", "caos", "complexidade". ¿Será isso possível?

Até a década de 1970 havia resistência ao ensino de probabilidade no antigo **primeiro grau**, pois se acreditava que tal tema era exclusivo ao antigo **segundo grau**. Porém, alguns educadores cientes da importância desse tema começaram a introduzi-lo nos primeiros anos do ensino fundamental com grande sucesso.

Nesta comunicação científica está sendo colocada em uma discussão crítica a tentativa de incorporação do tema "caos determinístico" nesses ensinos, talvez prevendo o mesmo tipo de importância do que ocorreu com o tema "probabilidade".

Metodologia: resolução de problemas por meio de recursos digitais (calculadoras, planilhas eletrônicas, programa matemático Winplot.

Palavras chaves: sistema, determinístico, estocástico, caos, sistemas dinâmicos.

tô

letra e melodia de Tom Zé.

Tô bem de baixo pra poder subir
Tô bem de cima pra poder cair
Desperdiçando pra poder faltar
Devagarinho pra poder caber
Bem de leve pra não perdoar
Tô estudando pra saber ignorar
Eu tô aqui comendo pra vomitar

Eu tô te explicando
Pra te confundir
Eu tô te confundindo
Pra te esclarecer
Tô iluminado
Pra poder cegar
Tô ficando cego
Pra poder guiar

Suavemente pra poder rasgar
Olho fechado pra te ver melhor
Com alegria pra poder chorar
Desesperado pra ter paciência
Carinhoso pra poder ferir
Lentamente pra não atrasar
Atrás da vida pra poder morrer
Eu tô me despedindo pra poder voltar

¿**CAOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA**? [1]

José Carlos Fernandes Rodrigues [professor de matemática aposentado]

Comunicação científica

• SOBRE O "TÍTULO" DO PRODUTO.

Caso procuremos em algum dicionário algum(ns) significado(s) para a palavra "caos" poderemos encontrar algo como:

> **caos**, [2] s.m.(gr.*khaos*). 1.Confusão geral dos elementos, antes da formação do mundo. 2.Total confusão, ou desordem.

Levando em conta **2.**, o título apresentado pode significar:

"¿Total confusão (desordem) no ensino de matemática?".

Porém, **Ian Stwart**, autor do livro ¿**Será que deus joga dados**?, propõe outro significado àquela palavra que poderia ser acrescentado nos dicionários:

> **caos**, s.m.(mat.)....3. Comportamento estocástico em um sistema determinístico.

Ocorrem na última interpretação três palavras que merecem alguns comentários: "**sistema**", "**determinístico**" e "**estocástico**" [na página **4**].

• SOBRE O TEMA DESTE "PRODUTO".

Segundo Philip Davis e Reuben Hersh, em "O Sonho de Descartes", o conhecido filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) no dia 10 de novembro de 1619 teve uma visão "...*da unificação de todas as ciências."* e a partir de 1637, ano da publicação do "**Discurso sobre o Método de Bem Conduzir a Razão na Busca da Verdade nas Ciências**", ficaram estabelecidos alguns critérios que iriam orientar a produção científica nos séculos 17, 18 e parte do século 19.

Naquela época, sob o **paradigma** [3] **renascentista**, que se caracterizava por possuir fundamentações em concepções aristotélicas, ptolomáicas e na visão de universo da igreja católica, iniciou-se um movimento que iria culminar no **paradigma mecanicista** (e no **determinismo**) por volta do fim do século 17.

---

[1] Estarei usando, abusadamente, os sinais "¿" e "¡" (importados da língua espanhola).

[2] Do verbo klainen, abrir-se, entreabrir-se. Esse termo parece ter sido utilizado pela primeira vez na Teogonia de Hesíodo (século 8 A.C.).

[3] Uma noção de paradigma científico, segundo Thomas Khun (anos 70 do século 20), pode ser caracterizada como **um conjunto de realizações produzidas por uma comunidade científica localizada em algum momento de sua história, sob forma de teorias, técnicas, valores, ideias, compartilhadas por essa comunidade, e pelas as que a sucedem, que se dispõe a desenvolvê-las, com o objetivo de definir problemas significativos para as ciências e buscar soluções que lhes são adequadas**.

O movimento iniciado por Descartes se caracterizava, *grosso modo*, na postura analítica para a qual "todo problema científico", por "mais complexo que pudesse ser", poderia ser subdividido em problemas "menos complexos", que comporiam o problema original.

Como consequência dessa postura cartesiana, a ciência física iria "explicar" a **realidade** por meio de instrumentos e ações que se caracterizaram pelas expressões "mecanicismo" e "determinismo".

Os "modelos" matemáticos representativos da realidade física passariam a ser denominados **modelos matemáticos determinísticos**.

Além de Descartes, outras figuras contribuíram decisivamente para a substituição do paradigma vigente (final do século 17). Uma delas foi Galileu Galilei (1564-1630) que introduziu na ciência física a quantificação e a medição que se tornaram ações de seus sucessores nos séculos seguintes.

Uma questão pertinente e relativa a "ensinos" atuais de matemática e que pode ser remetida à época de Galileu é:

¿Os conteúdos atuais dos ensinos fundamental e médio de matemática no Brasil estariam circunscritos ao seu desenvolvimento na época de Galileu?

Outras duas figuras que revitalizaram o paradigma emergente foram Isaac Newton (1647-1727) [4] e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

¿Por que o desenvolvimento da matemática daquela época não foi incorporado aos ensinos fundamental e médio?

¿Por que o cálculo diferencial ficou restrito ao ensino pós-médio (nas escolas de engenharia, de economia, de física,...)?

¿Qual é o "tamanho" da "complicação" conceitual do cálculo diferencial que levou algumas "autoridades" a propor o seu ensino apenas para jovens e adultos?

¿Teria esse determinismo influenciado o ensino da matemática nos ensinos fundamental e médio em nossos dias no Brasil?

¿Como se pode explicar o ensino de probabilidade nos ensinos fundamental e médio se essa importantíssima "construção" do conhecimento humano teve um surgimento histórico posterior a vários outros que são deixados para instâncias "superiores"?

Mas o século 19 iria trazer alguns acontecimentos significativos que culminariam em uma trajetória para a substituição do paradigma iniciado no final do século 17 e começo do século 18 por Galileu e Descartes e durante o século 18 por Newton.

[4] Com sua **Mecânica Gravitacional** ele contribuiu para a construção da visão de **universo** como uma "máquina perfeita" descrita por equações matemáticas precisas (cálculo diferencial),

Entre eles podemos destacar a obra fundamental de Charles Darwin, "A Origem das Espécies", publicada em 1859, e que iria romper, de certa forma, com o mecanicismo decorrente do determinismo instalado na forma de "enxergar" ciência.

A **evolução** se tornaria a forma pela qual se poderia explicar as "transformações" dos seres vivos em interação, durante sua história, com o seu meio ambiente e com a "novidade" decorrente dessa interação.

Era a incorporação do "aleatório" como um componente capaz de criar "complexidade".

Outro acontecimento que viria contribuir para o questionamento a respeito do determinismo vigente naquela época sairia da própria ciência física no estudo que ficou conhecido como **termodinâmica macroscópica**, cujo foco era o **calor** [5].

Pode-se citar, por exemplo, os estudos de Sadi Carnot (1824), Lord Kelvin (1853) e Rudolph Clausius (1865) que contribuíram de maneira significativa para a explicitação do **Segundo Princípio da Termodinâmica** e do conceito de **Entropia**.

Assim, uma questão pertinente que surgiu nos meios científicos era:

> "*¿Como explicar, à luz da 'perfeição' científica mecanicista vigente em meados do século 19, essa 'imperfeição' das 'máquinas reais' que podia ser traduzida por meio da entropia (calor não-utilizável) e que não se coadunava com as idealizações científicas tais como movimento sem atrito, movimentos perpétuos, fenômenos reversíveis?"*

Um significado para a entropia ficou por algum tempo "sem explicação".

Na segunda metade do século19 (1872), Ludwig Boltzmann (1844-1906), forneceu uma interpretação microscópica estatística da entropia que "media o estado de desordem molecular" por meio das probabilidades de encontrar todas as moléculas de uma amostra em seus diferentes estados.

Era a tentativa de Boltzmann de introduzir o conceito de evolução na física, assim como Darwin havia introduzido o conceito de evolução na biologia.

Daquela época até meados da segunda metade do século 19, com Boltzmann o paradigma mecanicista começa a ser questionado.

Algumas questões que se colocam são:

¿Como a humanidade "acelerou" de forma "quase vertiginosa" os avanços nas ciências ocidentais?

¿Aos programas de ensino no século 20, nos ensino fundamental e médio, foi incluída de forma educacional "essa aceleração"?

[5] Resumidamente entendido como "energia em trânsito" (que, em essência, é uma forma de trabalho) e suas consequências nas máquinas térmicas (na época, as máquinas a vapor)

Era o momento de ruptura entre a reversibilidade do tempo dos fenômenos físicos descritos pela Mecânica Clássica, aceita como expressão de um conhecimento ideal [as leis físicas exibiam a equivalência entre o passado e futuro (reversibilidade entre o passado e o futuro)] e a inquietante introdução da irreversibilidade do tempo nesses fenômenos.

Introduziu-se, nos conhecimentos humanos, o conceito de **flecha do tempo**.

Já que em outros ramos de conhecimentos humanos, tais como sociologia, cosmologia, biologia, o tempo é irreversível (o passado e o futuro desempenham papeis distintos), ¿como a ciência física poderia se destacar diferentemente daqueles conhecimentos?

Segundo Ilya Prigogine, este dilema se constitui no ¡**paradoxo do tempo**!

A questão que (ainda) permanece é: ¿como pode ser possível incorporar a flecha do tempo na ciência física sem destruir imensas construções da humanidade tais como a Mecânica Clássica newtoniana e a Física Quântica?

• SOBRE "SISTEMA".

Talvez não seja possível colocar, com precisão, a época na qual se começou a utilizar o termo "Sistema".

Porém, referências a "sistemas físicos", "sistemas biológicos", "sistemas sociais", "sistemas econômicos" foram incorporados em diversos estudos naqueles campos de conhecimentos.

O termo "sistema" possui muitos significados e caracterizações.

Uma delas é apresentada por **Mario Bunge** (1919-....), físico e filósofo argentino que, em **Epistemologia: curso de atualização** (1980), assim se expressa:

> *"Um sistema é algo complexo cujas partes, ou componentes se relacionam de tal modo que o objeto se comporta, em certos aspectos, como uma unidade e não como um conjunto de elementos".* [6]

Assim, uma das preocupações da ciência tornou-se em realizar previsões de comportamentos de sistemas físicos, biológicos, econômicos, sociais ao longo do tempo.

Uma forma para estudar um "sistema" consiste em expressá-lo por um "sistema equações diferenciais" que pode ser assim formulado:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (e_1)$$

[6] Em **"Concepções em termodinâmica: o senso comum e o conhecimento científico."**, tese de doutorado em Educação da professora **Anildes Cafgne** da PUCSP.

no qual **x** é uma variável **n-dimensional** contínua (um vetor de $\mathbf{R^n}$), **F** é um campo de vetores e **t** representa a "evolução" do sistema em estudo no tempo.

Outra descrição de um "sistema" consiste na forma "discreta" do tipo anterior e que pode ser formulado por meio de equações recorrentes:

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad (e_2)$$

no qual **t** é descrito em intervalos regulares de tempo.

O sistema $\mathbf{(e_1)}$ é denominado "**Sistema Dinâmico Contínuo**" e o sistema $\mathbf{(e_2)}$ é denominado "**Sistema Dinâmico Discreto**".

No âmbito das questões relacionadas com processos de ensino e aprendizagem de matemática ¿poderiam sistemas humanos inseridos em sistemas educacionais e, em particular, em sistemas de ensino de matemática, serem interpretados como sistemas dinâmicos?

¿Poderia um estudo de alguns sistemas dinâmicos ser anexado aos conteúdos do ensino de matemática nos ensinos fundamental e médio?

¿É pertinente introduzir nos ensinos fundamental e médio conceitos, instrumentos, procedimentos que revelem as tentativas das ciências em explicar a vida e o correspondente desenvolvimento que está ocorrendo na matemática e abrir a possibilidade de uma interdisciplinaridade?

Sistemas dinâmicos podem ser classificados em "estáveis" e "instáveis".

Em linhas gerais, um sistema dinâmico é estável quando pequenas perturbações nas condições iniciais produzem pequenos efeitos.

Porém, para uma classe "muito grande" de sistemas dinâmicos, perturbações nas condições iniciais podem provocar modificações neles que se "amplificam" na trajetória do tempo.

Quando estudava o problema dos três corpos (por exemplo, Terra, Sol e Lua) e a interação gravitacional existentes entre eles, o matemático francês Jules-Henri Poincaré (1854-1912) foi levado à conclusão que o problema dos três corpos pode ser enquadrado na categoria dos sistemas instáveis.

Mais que um sistema dinâmico instável, pode-se dizer que esse é um "**sistema caótico**" oriundo de um sistema de equações determinísticas com origem na física clássica.

Esta foi uma grande descoberta que abriu novos horizontes para a busca de soluções, até então "inacessíveis", de vários problemas que haviam sido relegados para um "momento" futuro na esperança que as dificuldades que se apresentavam fossem "apenas" de ordem técnica matemática.

Trata-se, então, do que se chama "**caos determinístico**".

Um exemplo de um sistema caótico (em "Chaotic Dynamical System", de Robert Devaney, página 31), e que será mencionado na sequência deste texto com um pouco "mais de detalhes", é o seguinte:

Seja **F** a função quadrática:

$$F_k(x) = k.x.(1 - x),$$

definida para todo **x** do intervalo **[0; 1]**, na qual **k** é um parâmetro.

As "iterações" obtidas a partir de **F** e a partir de algum $\mathbf{x_0}$ geram um sistema dinâmico discreto que pode ser assim representado:

$$x_0;\ F_k(x_0);\ F_k^2(x_0);\ F_k^3(x_0);\ F_k^4(x_0);\ .....$$ [7] **.**

Muitos desses tipos de sistemas instáveis e caóticos possuem propriedades que podem ser classificadas como extraordinárias.

Resumidamente podemos destacar algumas, tais como:

- Os sistemas são descritos por sistemas de equações diferenciais não-lineares;
- Algumas perturbações sobre as condições iniciais de equilíbrio levam o sistema a condições "caóticas" que o afastam do equilíbrio inicial [o sistema possui "dependência sensitiva" às condições iniciais];
- Algumas dessas perturbações ocorrem sob a forma de energia externa ao sistema em estudo caracterizando-o como um "**Sistema Aberto**" [8];
- A partir da instabilidade provocada pelas perturbações sobre as condições iniciais, em algum "ponto crítico" ao longo de sua trajetória temporal, o sistema pode ganhar "estabilidade", "padrão", "organização";
- Nesse "ganho" de estabilidade o sistema interage com o meio "dissipando" energia. Aqui, a "dissipação" não se caracteriza como um "desperdício", como ocorria em fenômenos estudados na termodinâmica clássica (atrito, transferência de calor,...), mas como fonte de uma "nova" ordem. O sistema se torna "complexo";

Uma questão que se pretende colocar aqui diz respeito a situações de ensino e aprendizagem de matemática, diante de algumas de suas peculiaridades com relação a outros campos de conhecimentos:

---

[7] Para uma aplicação desse sistema dinâmico, veja algumas atividades na página **11**.

[8] Um sistema aberto (todos os sistemas vivos) é sempre dependente do meio ambiente no qual está inserido e com o qual realiza troca de "energias", "informações" e "matéria". Um sistema aberto se caracteriza pela sua (auto) organização interna que é produzida por informação (sujeita a ruídos) e por troca de energia com o meio.

Um sistema fechado (cuja classificação não é feita em oposição a sistema aberto) só está sujeito a contribuição de energia (entropia crescente até a sua "morte térmica").

¿Grupos de "agentes" [9] que estão inseridos em algum sistema de ensino de matemática e que recebem alguns tipos de "perturbações" em suas condições iniciais, tanto na ação de quem ensina, como na ação evolutiva individual, ou como na ação evolutiva do grupo, podem ser identificados como sistemas dinâmicos instáveis e serem levados, na sua trajetória temporal, a um "estado caótico", para longe do equilíbrio?

• DETERMINÍSTICO E ESTOCÁSTICO.

Antes da explicitação de um significado para as expressões "**sistema determinístico**" e "**sistema estocástico**" pode ser conveniente uma "conversa" a respeito de: **experimentos**, **problemas** e **modelos**.

• SOBRE EXPERIMENTOS E PROBLEMAS.

Para não corrermos o risco de uma regressão "sem fim", faremos "poucos" comentários sobre os termos "**experimento**" e "**problema**".

Entre eles, veja o tipo de interpretação que se pretende dar a essas palavras**:**

> *"Há vários tipos de **experimentos** e **problemas** que podem estar preocupando as pessoas neste momento. Por exemplo, a procura por um remédio para a cura de determinada doença, a busca de condições sociais, habitacionais, educacionais aceitáveis para as populações carentes desses valores, a pesquisa de mercado para o lançamento de um novo produto, o investimento em um projeto espacial, a otimização do uso de recursos governamentais para construção de escolas e hospitais, o estudo de novas tecnologias de comunicação e transmissão de informações, a construção de um novo motor que não irá utilizar combustíveis não renováveis, a melhoria de equipamentos robotizados que realizam tarefas nocivas às pessoas."*

A última lista pode ser aumentada enormemente. Para cada um dos problemas citados, é possível que existam vários caminhos para uma busca de sua(s) solução(ões) [caso exista(m)], nem todos conduzindo a um mesmo destino.

Um desses caminhos consiste em "construir" **modelos** para representá-los.

• SOBRE MODELOS.

Mas, ¿o que é "**modelo**"?

Para uma reflexão sobre a questão proposta, veja alguns dos usos desse termo a seguir:

"Aquela moça tornou-se um **modelo fotográfico** no Japão."

---

[9] O termo "agente" está sendo usado para representar tanto quem "ensina" como quem "aprende".

"O engenheiro de obras da prefeitura duma cidade do interior construiu um **modelo** da usina que fornecerá eletricidade aos agricultores da região."

"O escultor fez, em primeiro lugar, um **modelo** em barro da obra que pretendia fazer em mármore."

"Aquele economista do governo disse que o **modelo** macro econômico precisa ser revisto."

"Os militares da segunda guerra mundial utilizaram **modelo**s de **pesquisa operacional** para otimizar as suas operações de transporte de tropas, equipamentos, combustíveis e alimentação."

"Aquele físico está se aprofundando na compreensão do **modelo atômico** com base na física das partículas subatômicas".

"Um **modelo** para uma teoria formal **T** é uma estrutura na qual todos os axiomas de sua linguagem são fórmulas 'verdadeiras'." [10]

Estaremos interessados, *grosso modo*, na seguinte caracterização para esse termo:

> "Um **modelo** para um **experimento** pode ser considerado 'um conjunto de procedimentos' com o objetivo de **representar** aquele experimento, responder adequadamente as **questões** que aquele experimento levanta e tomar algumas **decisões** 'cabíveis' a respeito daquelas questões".

Há, basicamente, dois tipos de **modelos** para um experimento: **modelo matemático** e **modelo não matemático**. Iremos nos concentrar nos experimentos para os quais são adequados **modelos matemáticos**.

Por sua vez, os **modelos matemáticos** podem ser classificados em **modelos determinísticos** e **modelos não determinísticos**.

• SOBRE MODELOS DETERMINÍSTICOS.

Nas palavras de **Paul L. Meyer**, em "**Probabilidade: aplicações à estatística**":

> "*Por essa expressão (**modelo determinístico**) pretendemos nos referir a um modelo que estipule que as condições sob as quais um experimento seja executado **determinem** o resultado do experimento.*"

Em outros termos, se um particular experimento for repetido algumas vezes nas mesmas condições iniciais e utilizando-se os mesmos recursos a ele inerentes, então se espera obter os mesmos resultados.

[10] Em "Lógica & Algoritmos", capítulo dois: Teoria da Quantificação, notas de aula de Alberto Augusto Júnior, curso de verão no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973.

Cabe aqui um exemplo: conhecidas, por exemplo, as massas de dois "corpos" e a "distância" entre seus centros, é possível determinar a "força de interação" entre aqueles corpos denominada **força de atração gravitacional** por meio da "lei da gravitação de **Newton**".

É possível afirmar, sem muito medo de errar, que "ensinos de matemática" nos ensinos fundamental e médio se caracterizam, em geral, por enfatizarem, quase essencialmente, situações determinísticas, muito embora possam existir, nesses trabalhos, algumas incursões por situações probabilísticas e estatísticas.

Nessas condições as ações em "ensinos de matemática" se concentram nos aspectos quantitativos e analíticos dos temas trabalhados.

• SOBRE MODELOS NÃO DETERMINÍSTICOS.

Um **modelo não determinístico** pode ser caracterizado como um **modelo** para um experimento no qual as condições em que ele é realizado **determinam** um "comportamento" probabilístico (¿imprevisível?) dos resultados observáveis.

Ou seja, se um particular experimento for repetido algumas vezes nas mesmas condições iniciais e utilizando-se os mesmos recursos a ele inerentes, então se espera obter apenas um "comportamento" probabilístico dos resultados observáveis.

Um **modelo não determinístico** pode ser denominado, também, **modelo probabilístico**, ou então **modelo estocástico**.

Cabe aqui um exemplo: na produção em série de parafusos por meio de um equipamento industrial deseja-se conhecer a quantidade de parafusos sem defeito para uma produção diária. Durante alguns dias, são escolhidos, "**ao acaso**", lotes da produção diária e é feita uma contagem dos parafusos com defeito. Se o experimento for realizado algumas vezes nas mesmas condições, então os resultados particulares podem ser distintos dois a dois.

Porém, se o experimento for repetido "muitas vezes" sob as mesmas condições, o que se espera é "estimar" (**medir**) probabilisticamente os resultados observáveis: qual é a porcentagem de parafusos com defeito que são produzidos diariamente.

Segundo **Ian Stwart**, "**estocástico**" significa "**aleatório**".

¿E o que significa "**aleatório**" [11]?

Bem, ¿que tal afirmar que "**aleatório**" significa "**ao acaso**"?

Segundo **Henri Atlan**, em "**Entre o cristal e a fumaça**" pode-se ler:

> "*'**acaso**' é a interseção entre duas sequências independentes de acontecimentos de 'causa e efeito'* [12]"

[11] ¡Não "vale" afirmar que é "**estocástico**"!

• SOBRE A "DEFINIÇÃO" DE CAOS, SEGUNDO IAN STWART.

Não sei quanto a você, mas tomar consciência que uma "definição" de "caos" reúne em seu escopo duas situações que são (aparentemente) antagônicas ["comportamento" **estocástico** (**aleatório**, **ao acaso**, **probabilístico, ¿imprevisível**?) em um **sistema determinístico** (**não aleatório**, **previsível**)] causa, em um primeiro momento, um "desconforto" que pode (¿deve?) ser enfrentado e entendido.

Tendo isso em vista, podemos retornar à questão inicial:

"¿Caos no ensino de matemática?"

e interpretá-la da seguinte forma:

¿Comportamento estocástico em sistemas determinísticos no ensino de matemática?

É possível afirmar que, ao se tratar de **sistemas caóticos**, estamos diante de **sistemas** que podem conter (e contêm) "grandes" dificuldades conceituais e técnicas, pois são muitos os aspectos que fazem parte desse tipo de sistema e que transcendem tudo (ou quase tudo) daquilo que faz parte dos ensinos fundamental e médio atuais.

A questão presente é: ¿Você "acredita" que existe alguma possibilidade de tratar esse assunto nos ensinos fundamental e médio?

Uma tentativa de resposta à questão será fornecida a seguir.

Uma análise crítica dessa tentativa fica a seu critério.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E DOS CONCEITOS INTRODUTÓRIOS.

• SOBRE A POSSIBILIDADE DE SE INTRODUZIR "CAOS" NO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO.

As tentativas de respostas não têm a menor pretensão de originalidade.

Elas foram inspiradas em seis livros:

- O primeiro já foi citado (¿**Será que deus joga dados**?);
- O segundo é: **Dos ritmos ao Caos** de **Pierre Bergé**, **Yves Pomeau** e **Monique Dubois-Gange**;
- O terceiro é: "**An introduction to chaotic dynamical system**" de **Robert L. Devaney**;
- O quarto é **Caos: uma introdução** de **Nelson Fiedler-Herrara** e **Carmen P. Cintra do Prado**;

[12] Estou andando pela calçada de uma rua logo após uma chuva. Paro próximo à guia da rua, a uma poça d'água que a chuva ali formou e à faixa de pedestre que pretendo usar para atravessá-la. Neste instante, um automóvel, em alta velocidade, passa pela poça d'água .... **.**

- O quinto é **Introdução a Equações Diferenciais** de **Florin Diacu**;
- E o sexto é **O fim das certezas** de **Ilya Prigogine**;

Para essas tentativas, é conveniente que você tenha em mãos uma calculadora eletrônica (de preferência, uma científica).

Você poderá utilizar, também, uma planilha eletrônica que permitirá uma razoável economia de tempo e energia.

Vamos começar com uma calculadora (uma das "tradicionais").

- Vamos imaginar que a calculadora possua as teclas:

[x^2] [1/x] [√] [y^x] [e^x] [Log] [ℓn] [sen] [cos] [tg],

além das teclas usuais.

- **UTILIZANDO A TECLA [tg] E UMA PLANILHA ELETRÔNICA.**

- **Ian Stwart** afirma que realizou **300000** ***iterações*** da tecla [tg], a partir do valor inicial $\mathbf{x_0 = 0,54321}$ e que o **sistema dinâmico** obtido não **convergiu** e nem se tornou **periódico** (veja um **sistema dinâmico periódico** funcionando quando você utiliza a tecla [1/x]).

Veja, a seguir, uma planilha eletrônica com **285** ***iterações***[13] da tecla [tg] a partir de $\mathbf{x_0 = 0,5}$ [cujo valor é introduzido na célula **B1**].

Acompanhe alguns procedimentos:

- ° Na célula **A1** digite o texto: "**x0 =**" (com ou sem aspas);
- ° Na célula **A2** digite a fórmula: "**=B1)**" (sem aspas);
- ° Na célula **A3** digite a fórmula: "**=TAN(A2)**" (sem aspas);
- ° Copie a célula **A3** até a célula **A27**;
- ° Na célula **B2** digite a fórmula: "**=TAN(A27)**" (sem aspas);
- ° Copie a célula **B2** até a célula **K2**;
- ° Copie a célula **A3** até a célula **K27**;

Veja essa planilha na figura seguinte:

O valor **0,69599** na célula **A5** significa $\mathbf{tg^{(3)}(0,5)}$, ou seja a **3ª iteração** da função **tg** a partir de $\mathbf{x_0 = 0,5}$:

$$tg^{(3)}(0,5) = tg(tg(tg(0,5))) \cong tg(tg(0,546302)) \cong tg(0,608029) \cong 0,695989531093423.$$

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico** (**determinístico**) obtido pelo processo ***iterativo*** da função **t(x) = tg(x)**, a partir de $\mathbf{x_0 = 0,5}$ é "**caótico**"?

[13] Você poderá aumentar enormemente a quantidade de "iterações".

Microsoft Excel - Pasta1

B1 fx 0,5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x0 =	0,5									
2	0,5	0,281852	0,159378	0,212755	0,451374	0,221879	0,562243	-0,28562	-0,43355	-0,25857	-0,36908
3	0,546302	0,28956	0,160741	0,216024	0,484751	0,225593	0,630078	-0,29365	-0,46293	-0,26449	-0,38681
4	0,608029	0,297934	0,16214	0,219448	0,526664	0,229499	0,729234	-0,30239	-0,4991	-0,27083	-0,40733
5	0,69599	0,307074	0,163576	0,22304	0,581444	0,233615	0,89354	-0,31196	-0,54514	-0,27765	-0,43146
6	0,835456	0,317104	0,165051	0,226814	0,657235	0,23796	1,243574	-0,32249	-0,60643	-0,28501	-0,46039
7	1,105483	0,328179	0,166566	0,230785	0,771684	0,242556	2,946161	-0,33415	-0,69362	-0,29299	-0,49593
8	1,991702	0,340491	0,168124	0,234972	0,97294	0,247427	-0,19796	-0,34717	-0,83144	-0,30167	-0,54104
9	-2,23384	0,35429	0,169726	0,239394	1,468442	0,252603	-0,20059	-0,36183	-1,09661	-0,31117	-0,60084
10	1,280408	0,369898	0,171375	0,244074	9,735806	0,258117	-0,20332	-0,37849	-1,94837	-0,32162	-0,68537
11	3,346325	0,387745	0,173072	0,249039	0,321461	0,264006	-0,20617	-0,39766	2,521385	-0,33319	-0,81758
12	0,207641	0,408422	0,174821	0,254319	0,333012	0,270316	-0,20914	-0,42004	-0,71422	-0,34609	-1,06652
13	0,210678	0,432756	0,176624	0,259947	0,345894	0,277098	-0,21224	-0,44662	-0,8669	-0,3606	-1,81204
14	0,213851	0,461961	0,178484	0,265965	0,360382	0,284415	-0,21549	-0,47889	-1,17789	-0,37709	4,064454
15	0,217172	0,497893	0,180404	0,272419	0,376839	0,292341	-0,21889	-0,51921	-2,41281	-0,39605	1,321089
16	0,220652	0,54357	0,182387	0,279364	0,395752	0,300964	-0,22245	-0,57151	0,892731	-0,41814	3,92111
17	0,224304	0,604293	0,184437	0,286866	0,417795	0,310392	-0,22619	-0,6431	1,241516	-0,44434	0,988307
18	0,228143	0,690458	0,186557	0,295003	0,44393	0,32076	-0,23013	-0,74937	2,926365	-0,4761	1,518067
19	0,232185	0,826107	0,188752	0,303869	0,475591	0,332233	-0,23428	-0,93042	-0,21861	-0,51566	18,9471
20	0,236449	1,084922	0,191026	0,313581	0,515019	0,345022	-0,23867	-1,34204	-0,22216	-0,56681	0,097854
21	0,240957	1,893577	0,193384	0,32428	0,565967	0,359397	-0,2433	-4,29497	-0,22589	-0,63648	0,098167
22	0,245731	-2,98973	0,195831	0,336147	0,635293	0,375715	-0,24822	-2,2549	-0,22982	-0,73909	0,098484
23	0,2508	0,153045	0,198373	0,349407	0,737253	0,394453	-0,25345	1,22628	-0,23395	-0,91142	0,098804
24	0,256194	0,154252	0,201017	0,364357	0,908065	0,416269	-0,25902	2,786863	-0,23831	-1,29015	0,099126
25	0,26195	0,155487	0,203769	0,381385	1,281245	0,442105	-0,26497	-0,3704	-0,24293	-3,4692	0,099452
26	0,268111	0,156752	0,206637	0,40102	3,356561	0,473355	-0,27135	-0,38832	-0,24782	-0,33985	0,099781
27	0,274725	0,158049	0,209629	0,423996	0,218342	0,512194	-0,27821	-0,40909	-0,25302	-0,35357	0,100114

Plan1

Pronto

Digite em **B1** outros valores e tire suas conclusões [14].

• OUTRO EXEMPLO DE SISTEMA DINÂMICO DISCRETO.

Neste exemplo, a sequência:

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\dots,\ P_n,\dots$$

representa a "evolução" do "tamanho" da população de uma particular comunidade biológica nas "gerações" **0**, **1**, **2**, ... , **n**, ... **.**

Uma preocupação com relação ao estudo da população dessa comunidade consiste em "determinar" algum tipo de "**padrão de comportamento**" para que se possa "estimar" o seu tamanho após **n** gerações da geração **0**.

Uma "estimativa" para $\mathbf{P_n}$ pode depender de um "imenso" conjunto de fatores que podem estar influenciando a "evolução" populacional daquela comunidade.

Alguns desses fatores podem ser os seguintes: alimentação, condições climáticas, predadores, existência de água, destruição do meio ambiente,**....**

[14] Segue em anexo a planilha "**Tan_Sinpro.xls**" que permite representar geometricamente esse sistema dinâmico.

Sem entrarmos no mérito da existência dessas condições, é possível estabelecer algumas hipóteses a respeito da comunidade para que se possam realizar as estimativas desejadas.

Uma hipótese (restrita) sobre a população consiste em impor as seguintes condições:

- Supor que o tamanho da população da geração **n+1** é **proporcional** ao tamanho da população da geração **n**. Em símbolos:

$$P_{n+1} = k_1.P_n,$$

em cuja expressão $\mathbf{k_1}$ representa uma constante.

- Supor que o meio no qual está inserida a população impõe um **limite superior** (¿suportável?) **L** para o seu crescimento e que a população da geração **n+1** é **proporcional** ao fator **L - população da geração n**. Em símbolos:

$$P_{n+1} = k_2.(L - P_n),$$

em cuja expressão $\mathbf{k_2}$ representa uma constante.

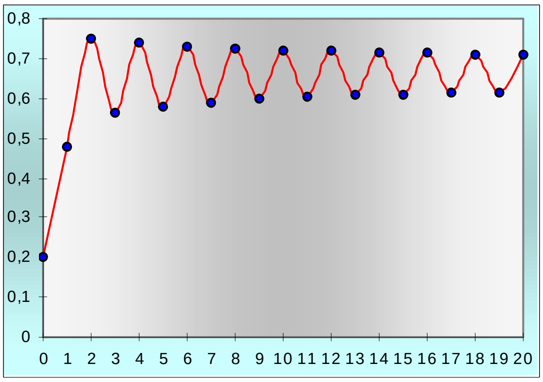
- Levando-se em conta as duas condições mencionadas, então é possível escrever que:

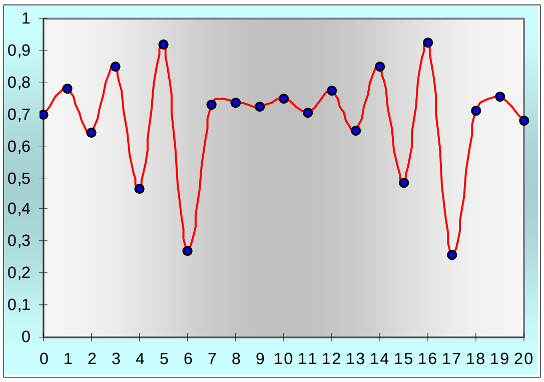
$$P_{n+1} = k.P_n.(L - P_n),$$

com **k** representando uma constante positiva.

A última fórmula recorrente denomina-se **Mapa Logístico** em sua forma discreta.

Veja duas representações gráficas desse **sistema dinâmico discreto** para **k = 3** e $\mathbf{P_0 = 0,2}$ (à esquerda) e para **k = 3,7** e $\mathbf{P_0 = 0,7}$, quando **L = 1**:





• UMA INTRODUÇÃO "ELEMENTAR" A SISTEMAS CAÓTICOS.

Existem "muitos temas" que podem ser utilizados para uma introdução desse assunto nos ensinos fundamental e médio, tais como funções polinomiais de grau 1, de grau 2, a função racional **r(x) =** $\frac{1}{x}$, a função irracional **ir(x) =** $\sqrt{x}$, as funções "**trigonométricas**", para citar algumas.

Por limitação de espaço nos concentraremos no **mapa logístico** por causa da "sua importância" em vários campos de estudo: meteorologia, economia, demografia, biologia, medicina.

Sem nos preocuparmos com uma metodologia adequada aos ensinos fundamental e médio, iremos propor algumas atividades a respeito do **mapa logístico** e o que podem, eventualmente, ser consideradas "elementares".

1º atividade: Uma cultura de bactérias possui em um determinado momento (identificado por **0**) uma população $\mathbf{P_0 = 0{,}1}$ milhão de indivíduos.

Um objetivo consiste em estudar a "evolução" dessa cultura por meio do mapa logístico para alguns valores da constante **k** e do limite populacional **L**.

Supondo que "as gerações" dessas bactérias tenham um período de **1 dia** e que o limite **L** seja da ordem de **100** milhões de indivíduos, então algumas propostas podem ser as seguintes:

1) Estimar os "tamanhos" da população dessa cultura (sistemas dinâmicos) para as **3** primeiras gerações, a partir do momento **0**, para os seguintes valores de **k**: **0,02**; **0,03**; **0,04**.

(i) para **k = 0,02** o mapa logístico pode ser escrito:

$$P_{n+1} = 0{,}02 \times P_n \times (100 - P_n) \text{ milhões de indivíduos.}$$

Resolução:

$P_1 = 0{,}02 \times P_0 \times (100 - P_0) = 0{,}02 \times 0{,}1 \times 99{,}9 = 0{,}1998$ milhão de indivíduos;

$P_2 = 0{,}02 \times P_1 \times (100 - P_1) = 0{,}02 \times 0{,}1998 \times 99{,}8002 \cong 0{,}398802$ milhão de indivíduos;

$P_3 = 0{,}02 \times P_2 \times (100 - P_2) = 0{,}02 \times 0{,}398802 \times 99{,}6012 \cong 0{,}794422$ milhão de indivíduos;

¿Quais são as possíveis conclusões sobre essa cultura?

(ii) para **k = 0,03** o mapa logístico pode ser escrito:

$$P_{n+1} = 0{,}03 \times P_n \times (100 - P_n) \text{ milhões de indivíduos.}$$

Resolução:

$P_1 = 0{,}03 \times P_0 \times (100 - P_0) = 0{,}03 \times 0{,}1 \times 99{,}9 = 0{,}2997$ milhão de indivíduos;

$P_2 = 0{,}03 \times P_1 \times (100 - P_1) = 0{,}03 \times 0{,}2997 \times 99{,}7003 \cong 0{,}898405$ milhão de indivíduos;

$P_3 = 0{,}03 \times P_2 \times (100 - P_2) = 0{,}03 \times 0{,}898405 \times 99{,}1036 \cong 2{,}665110$ milhões de indivíduos;

¿Quais são as possíveis conclusões sobre essa cultura?

(iii) para **k = 0,04** o mapa logístico pode ser escrito:

$$P_{n+1} = 0{,}04 \times P_n \times (100 - P_n) \text{ milhões de indivíduos.}$$

Resolução:

$P_1 = 0{,}04 \times P_0 \times (100 - P_0) = 0{,}04 \times 0{,}1 \times 99{,}9 = 0{,}3996$ milhão de indivíduos;

$P_2 = 0{,}04 \times P_1 \times (100 - P_1) = 0{,}04 \times 0{,}3996 \times 99{,}6004 \cong 1{,}592013$ milhão de indivíduos;

$P_3 = 0{,}04 \times P_2 \times (100 - P_2) = 0{,}04 \times 1{,}592013 \times 98{,}408 \cong 6{,}266671$ milhões de indivíduos;

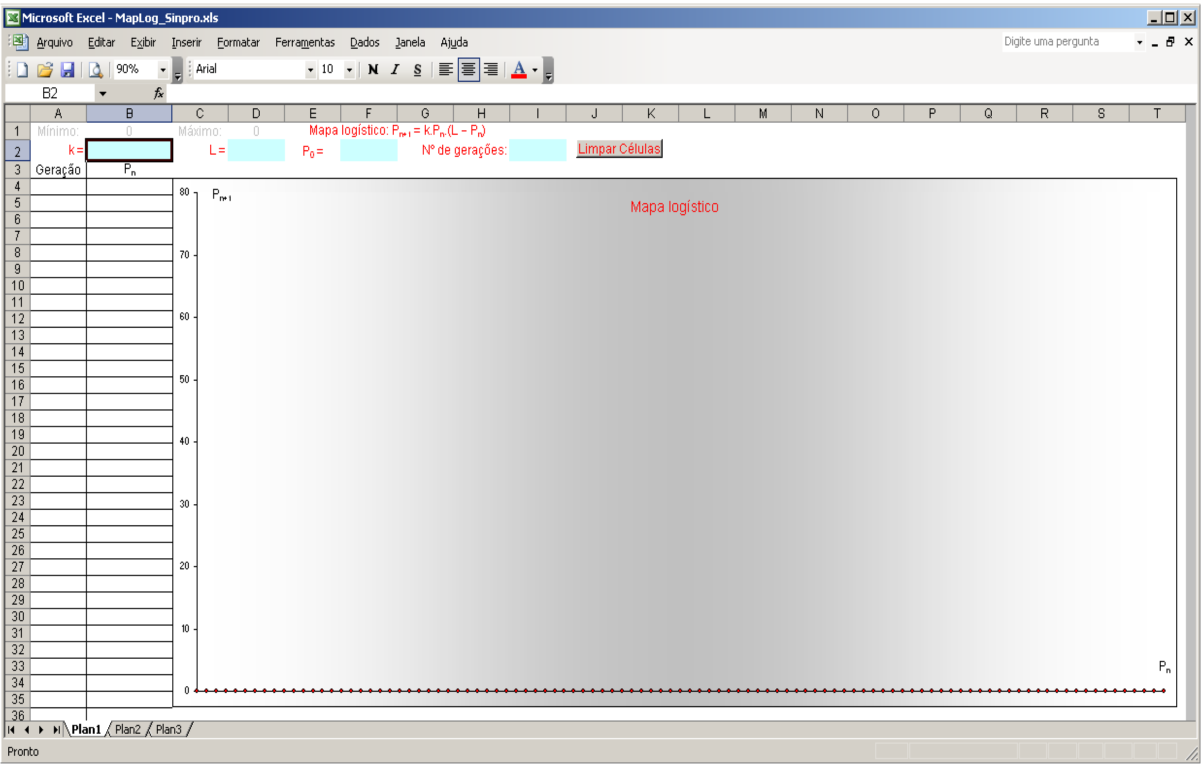
¿Quais são as possíveis conclusões sobre essa cultura?

É possível, você e eu, concluirmos que a quantidade de informações já obtidas em cada sistema dinâmico é insuficiente para conclusões significativas a respeito da "evolução" da cultura biológica.

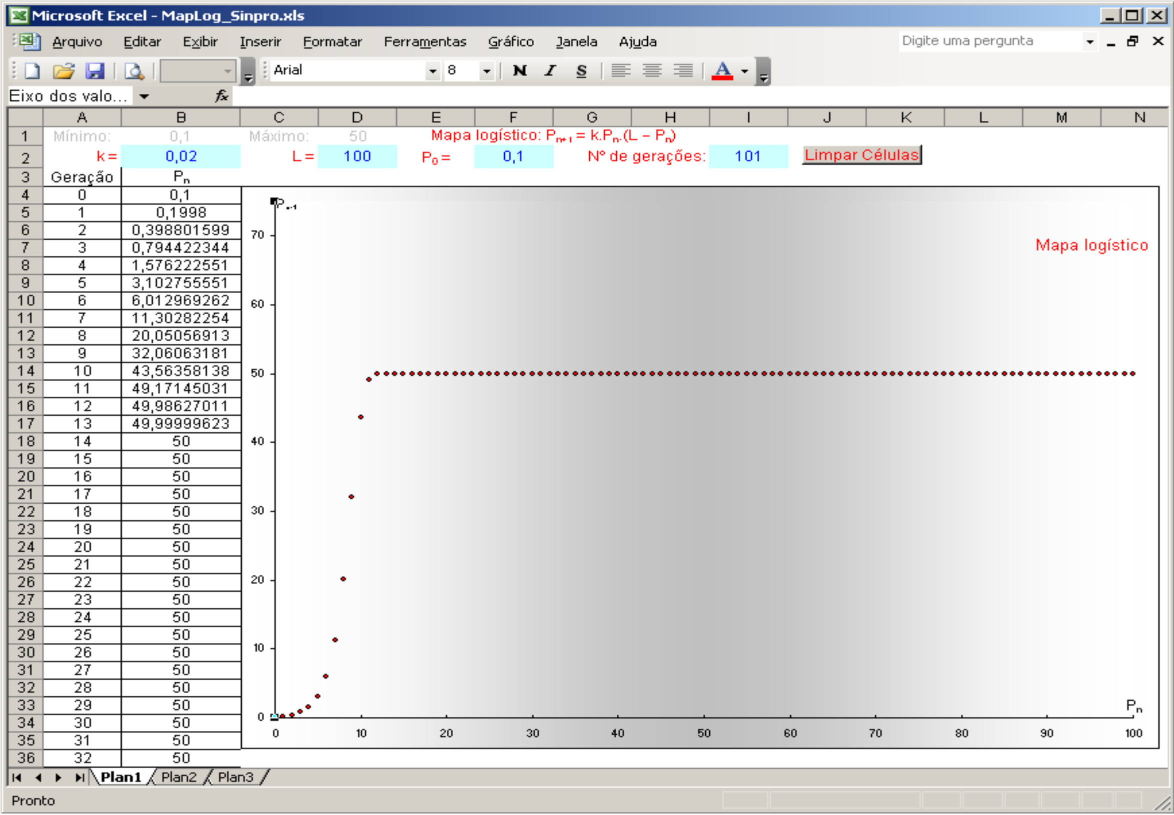
Utilizando uma planilha eletrônica é possível exibir diversos valores das sequências dos sistemas dinâmicos obtidos e, também, exibir representações gráficas deles em coordenadas retangulares (cartesianas).

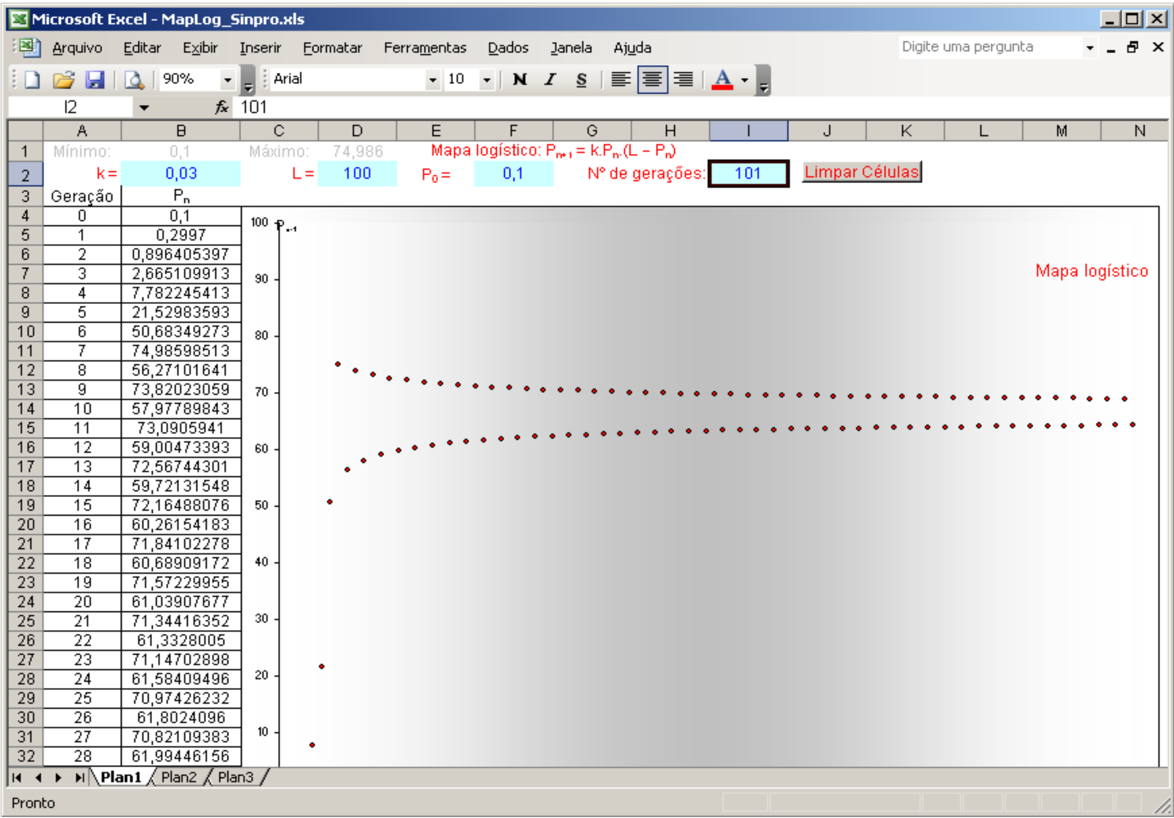
Caso haja algum interesse, você pode utilizar a planilha "**MapLog_Sinpro.xls**" que segue em arquivo anexo.

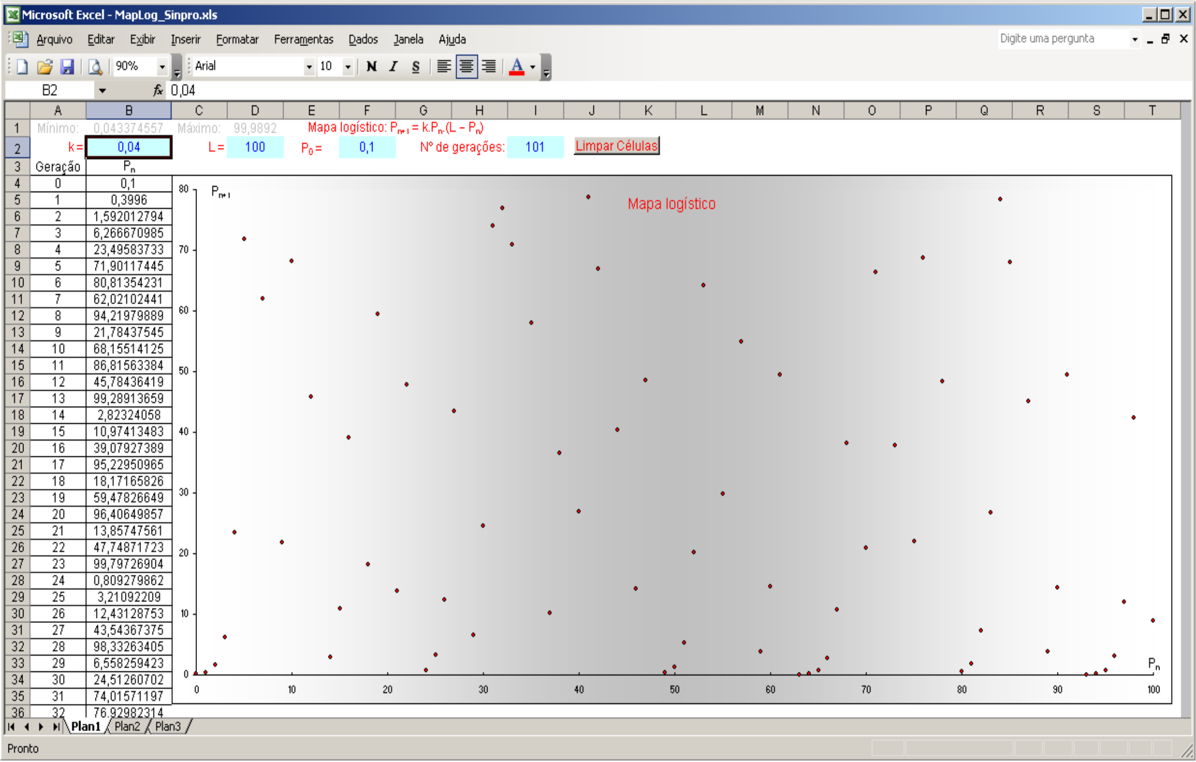
A figura a seguir exibe essa planilha "vazia":



Ao digitarmos **100** em **D2**, **0,1** em **F2**, **101** em **I2** e os valores **0,02**, **0,03** e **0,04** em **B2** obtemos as representações geométricas dos três sistemas dinâmicos da **1º atividade**:







"De olho" nessas três representações ¿que conclusões você poderia tirar daqueles sistemas dinâmicos?

¿É possível concluir que um deles é um **sistema dinâmico caótico**?

Para alguns detalhes de como essa planilha foi elaborada veja o "**Apêndice_1**" em texto anexo.

2º atividade: Esta atividade, ainda sobre o mapa logístico, possui um aspecto "mais abstrato", pois suas variáveis não possuem "significados externos" à matemática.

Para isso, vamos "transformar" o modelo logístico na sua forma recorrente em uma função de grau 2 cujas variáveis são contínuas.

Nessas condições, o mapa logístico toma a forma já mencionada na página **6**:

$$F_k(x) = k.x.(1 - x),$$

na qual **k** é uma constante positiva, **x** é variável real do intervalo **[0; 1]** e **L = 1**.

Algumas propostas podem ser:

1) ¿Para que valor(es) de **x**, $\mathbf{F_k(x) = 0}$?

¿Para que valor(es) de **x**, $\mathbf{F_k(x) = x}$?

O(s) valor(es) para **x** para o(s) qual(is) $\mathbf{F_k(x) = x}$ é(são) denominado(s) **ponto fixo** [15] da função.

[15] Com um pouco "mais de rigor", um **ponto fixo** do mapa logístico é um par **(x; x)** para algum **x.** Além disso, um **ponto fixo** também recebe o nome de **ponto de equilíbrio**

Um deles é **0**. O outro é:

$$p_k = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}.$$

¿Qual é o "**valor proibido**" para **k** na determinação do ponto crítico não nulo?

2) ¿O que é possível afirmar sobre p_k se: k = 1, k > 1 e 0 < k < 1?

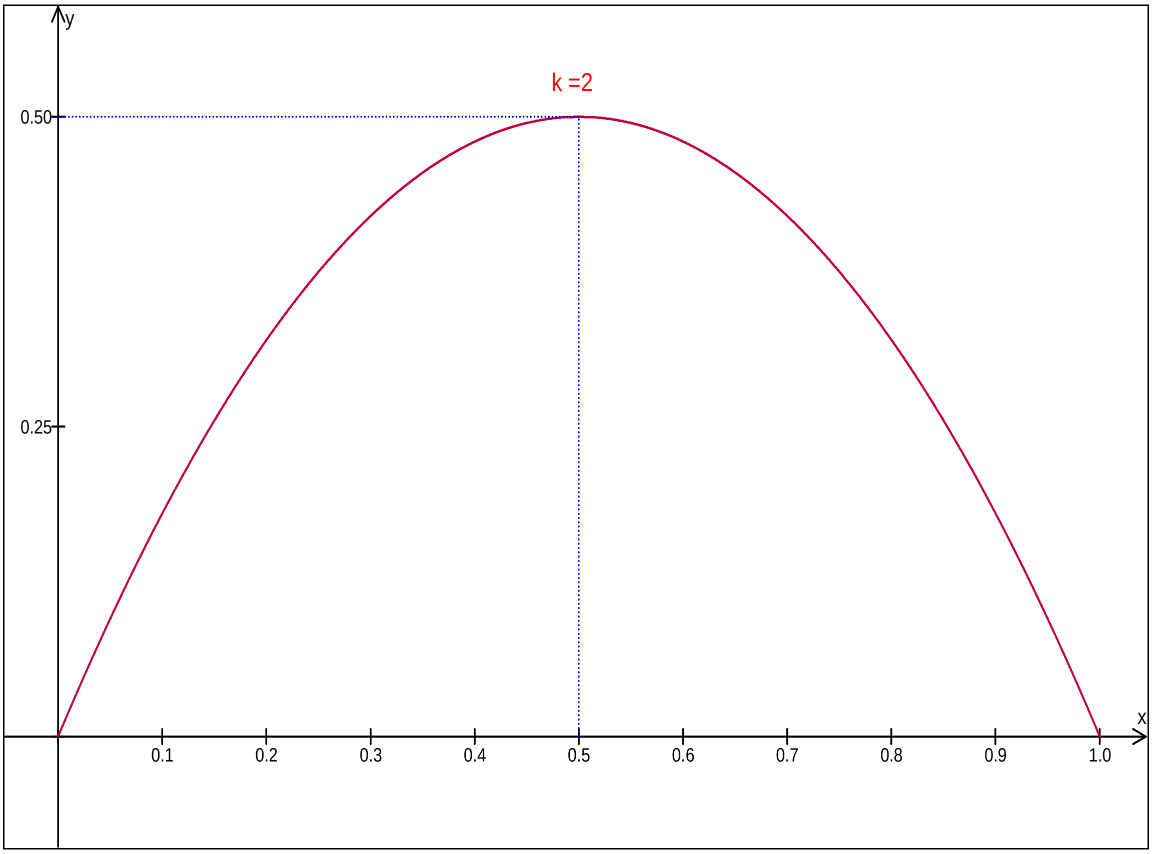
3) ¿Para qual valor de **x**, $F_k(x)$ atinge seu valor máximo?

¿Qual é o valor máximo para $F_k(x)$?

4) Esboce a representação gráfica de $F_k(x)$ para: k = 2; k = 3; k = 4.

Uma resolução do exercício **4** pode ser "otimizada" por meio do programa para computadores denominado **Winplot** desenvolvido por **Richard Parris** [16] e que possibilita "construir" representações gráficas de diversos tipos de funções bidimensionais e "tridimensionais". Uma apresentação em **Winplot** sobre mapas logísticos, denominada "**MapLog_Sinpro.wp2**", segue em arquivo anexo.

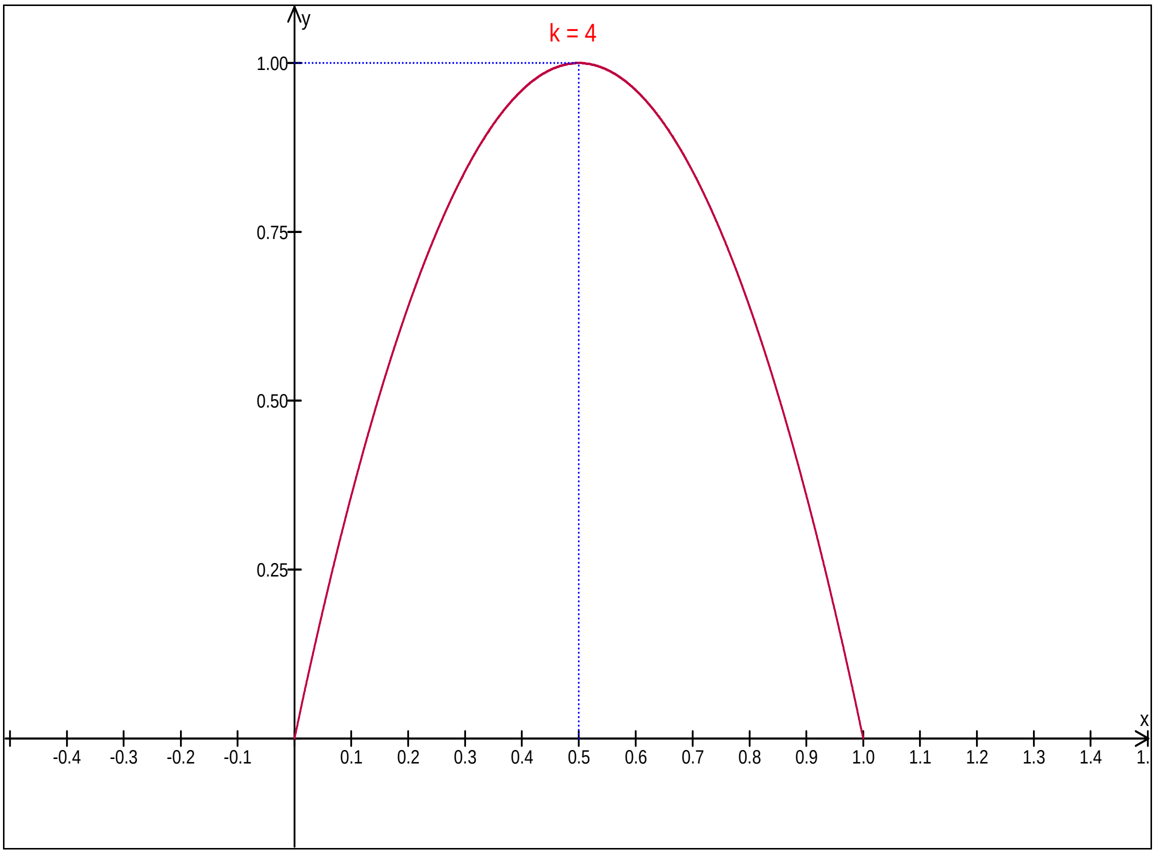
Veja a seguir duas dessas representações geométricas:



[16] Da **Philips Exeter Academy**, por volta de 1985. Esse programa pode ser "baixado" gratuitamente pela Internet. Um endereço possível para "baixar" Winplot é:

http://www.baixaki.com.br/site/dwnld47430.htm.

Há duas versões: em inglês e em português. Neste texto está sendo usada a versão em inglês.
O endereço http://www.gregosetroianos.mat.br/softwinplot.asp possui várias informações sobre esse aplicativo.



Para alguns detalhes da elaboração dessa apresentação veja o "**Apêndice_2**" em texto anexo.

5) Escolha um valor para **x**, **x > 1**, ou **x < 0**.

Produza a sequência com os valores:

$$x;\ F_k(x);\ F_k^2(x);\ \ldots\ ;\ F_k^{10}(x),\ \text{ para algum valor } \mathbf{k > 0}.$$

¿Quais são as suas conclusões?

6) Escolha um valor para $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{0 < x_0 < 1}$.

Represente geometricamente a sequência formada pelos valores:

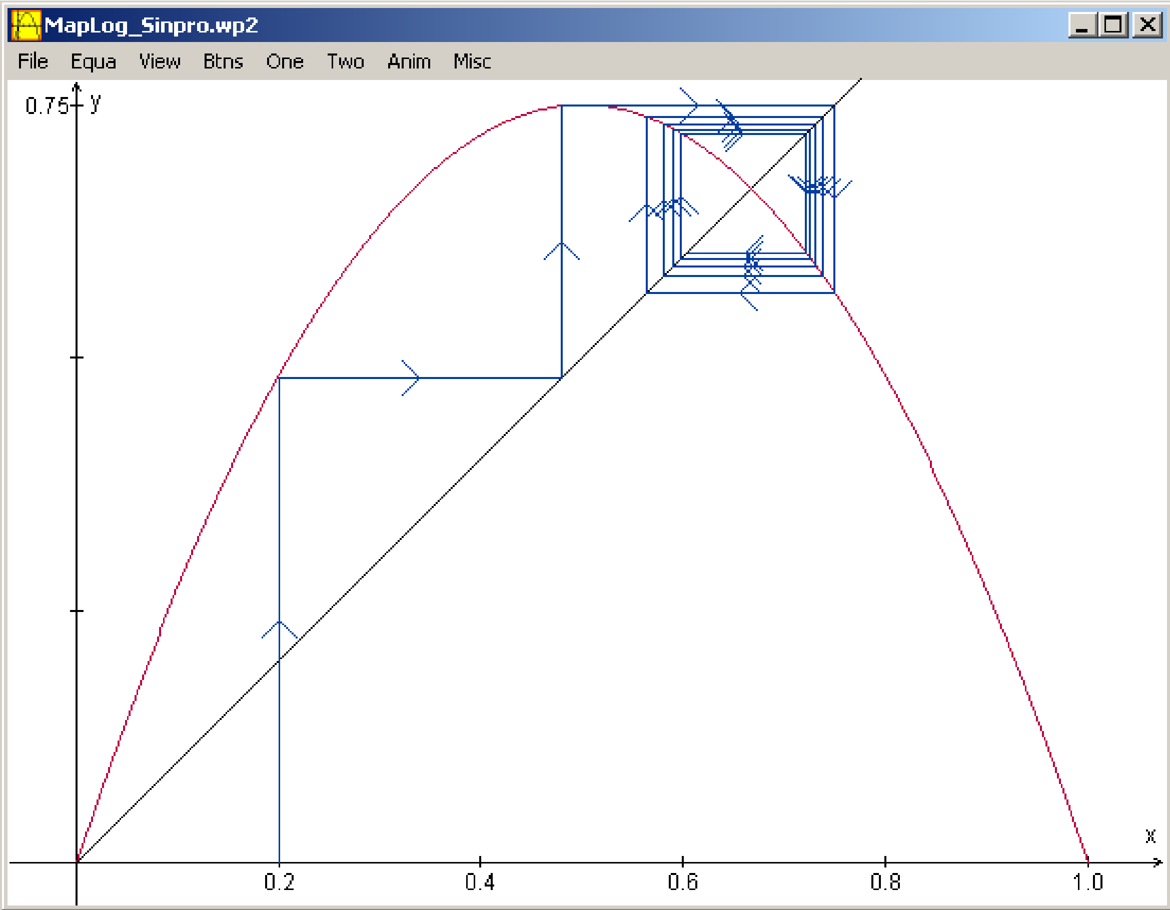
$$x_0;\ x_1 = F_k(x_0);\ x_2 = F_k^2(x_0);\ \ldots\ ;\ x_{10} = F_k^{10}(x_0),$$

escolhendo um valor para **k** tal que:

(i) $\mathbf{0 < k \leq 4}$; (ii) $\mathbf{k > 4}$;

Uma resolução do exercício **6** também pode ser "otimizada" por meio da mesma apresentação "**MapLog_Sinpro.wp2**" já mencionada.

A figura a seguir é a representação geométrica dos **11** primeiros termos do sistema dinâmico gerado pelo mapa logístico para **k = 3** e $\mathbf{x_0 = 0,2}$:



A sequência obtida:

$$x_0 = 0{,}2;\ \ x_1 = F_3(0{,}2) = 0{,}48;\ \ x_2 = F_3^2(0{,}2) = 0{,}7488;\ \ x_3 = F_3^3(0{,}2) \cong 0{,}56429568;$$

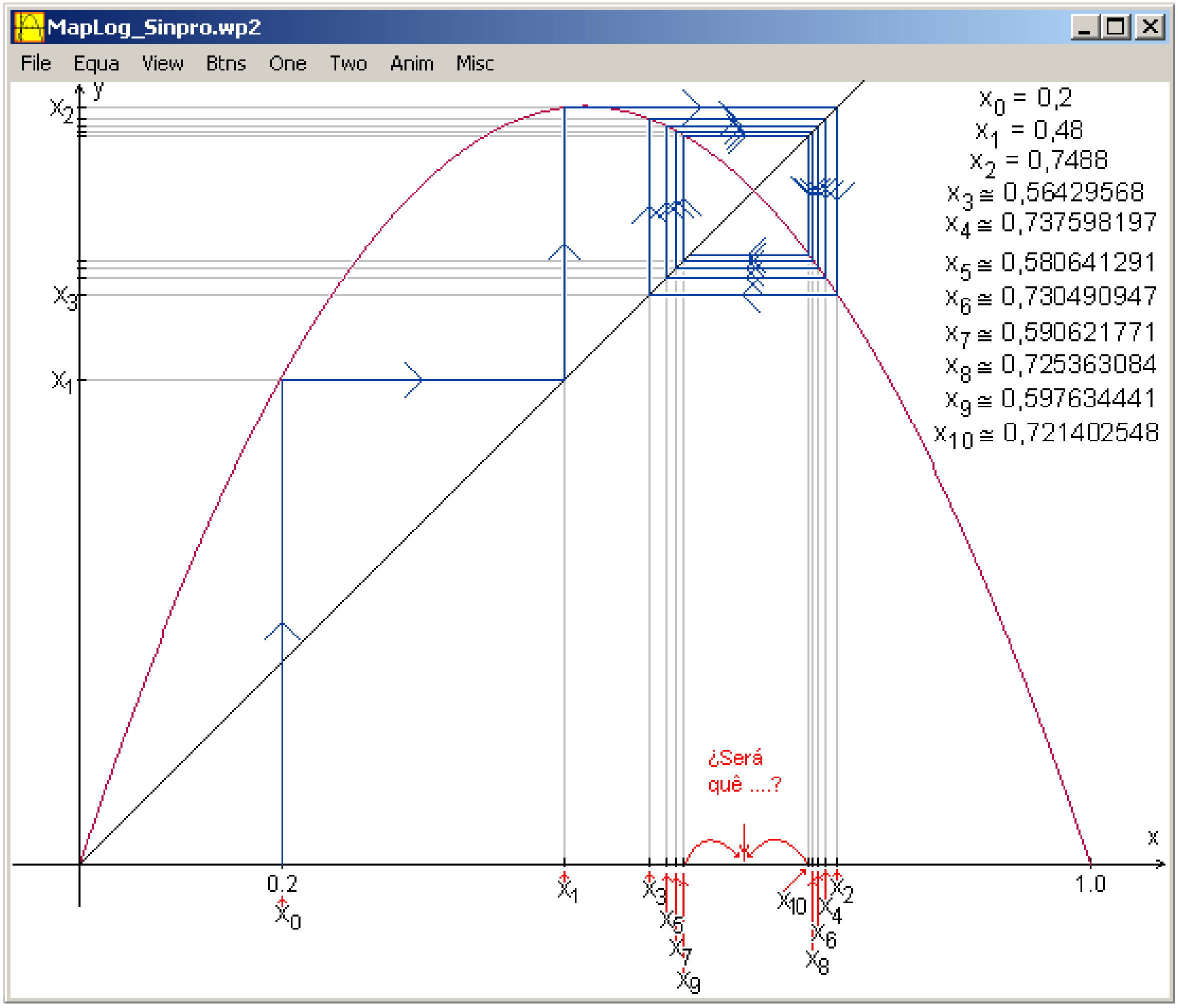
$$x_4 = F_3^4(0{,}2) \cong 0{,}737598197;\ \dots\ ;\ \ x_{10} = F_3^{10}(0{,}2) \cong 0{,}721402548,$$

pode ser "percebida" na figura "seguindo as setas".

Para explicitar com mais detalhes essa sequência, vamos "enfeitar" a última figura (que pode ser vista na página seguinte) com alguns recursos externos ao **Winplot**.

¿Você diria que o sistema dinâmico representado na última figura tem alguma característica que pode ser considerada caótica?

Para alguns detalhes da elaboração da continuação dessa apresentação veja o "**Apêndice_3**" em texto anexo.



Muita coisa "ficou faltando", mas a pergunta original permanece:

¿CAOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

BIBLIOGRAFIA:

ATLAN, Henri. *Entre o cristal e a fumaça: ensaio sobre a organização do ser vivo*. Trad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1992.

BOHR, Niels. *Física atômica e conhecimento humano: ensaios 1932 - 1957.* Trad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro, Contraponto, 1995.

CAPRA, Fritjof. *A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos*. Trad. Newton Roberval Eichemberg. São Paulo, Editora Cultrix, 1996.

DAMÁSIO, António R. *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. Trad. Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo, Companhia das Letras, 1996.

DAVIS, Philip J. e HERSH, Reuben. *A Experiência Matemática*. 2. ed. Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1985.

__________. *O Sonho de Descartes*. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1988.

DAY, Richard H. *The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth*. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 98, No. 2 (May, 1983), pp. 201-213 (13 páginas). Publicado por The MIT Press.

Stable URL: www.jstor.org/stable/1885621

DEVANEY, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2. ed. Boston, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989.

FIEDLER-FERRARA, Nelson e PRADO, Carmen P. Cintra do. *Caos uma introdução*. São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda, 1994.

HEISENBERG, Werner. *A parte e o todo: encontros e conversas sobre física, filosofia, religião e política*. Trad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro, Contraponto, 1996.

MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Trad. Ruy de C. B. Lourenço. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.

PESSIS-PASTERNAK, Guitta. *Do caos à inteligência artificial: quando os cientistas se interrogam*. Trad. Luiz Paulo Rouanet. Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

_________. *Ciência: Deus Ou Diabo?*. Trad. Edgar Assi. Editora Unesp, 1999.

POINCARÉ, J-Henri. *O Valor da Ciência*. Trad. Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro, Contraponto, 1995.

PRIGOGINE, Ilya. *O fim das certezas: tempo, caos, e as leis da natureza*. Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo, Editora da Universidade Estadual Paulista, 1996.

SANTAELLA, Lucia e VIEIRA, Jorge Albuquerque (Orgs.). *Caos e ordem na filosofia e nas ciências*. São Paulo, EDUC, 1998.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das matemáticas*. 2. Ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa, Gradiva, 1992.

STWART, Ian. *Será que Deus joga dados?*. 2. Ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa, Gradiva, 1992.

Tien-Yien Li; James A. Yorke. *Period Three Implies Chaos.*The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975), pp. 985-992.

Stable URL:

http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28197512%2982%3A10%3C985%3APTIC%3E2.0.CO%3B2-H